目录

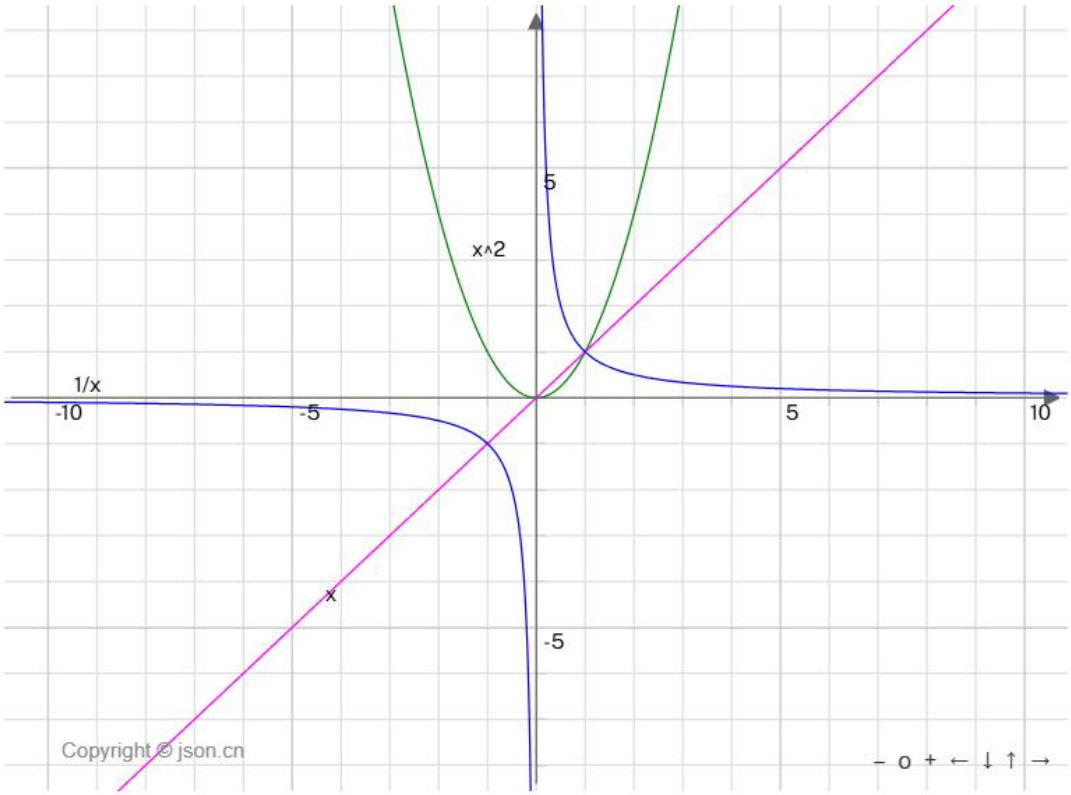
幂函数.....2
二次函数.....6
指数.....14
对数.....17
三角函数.....20
集合和区间.....30
不等式.....32
基本不等式.....34
求定义域.....36
反比例函数.....39

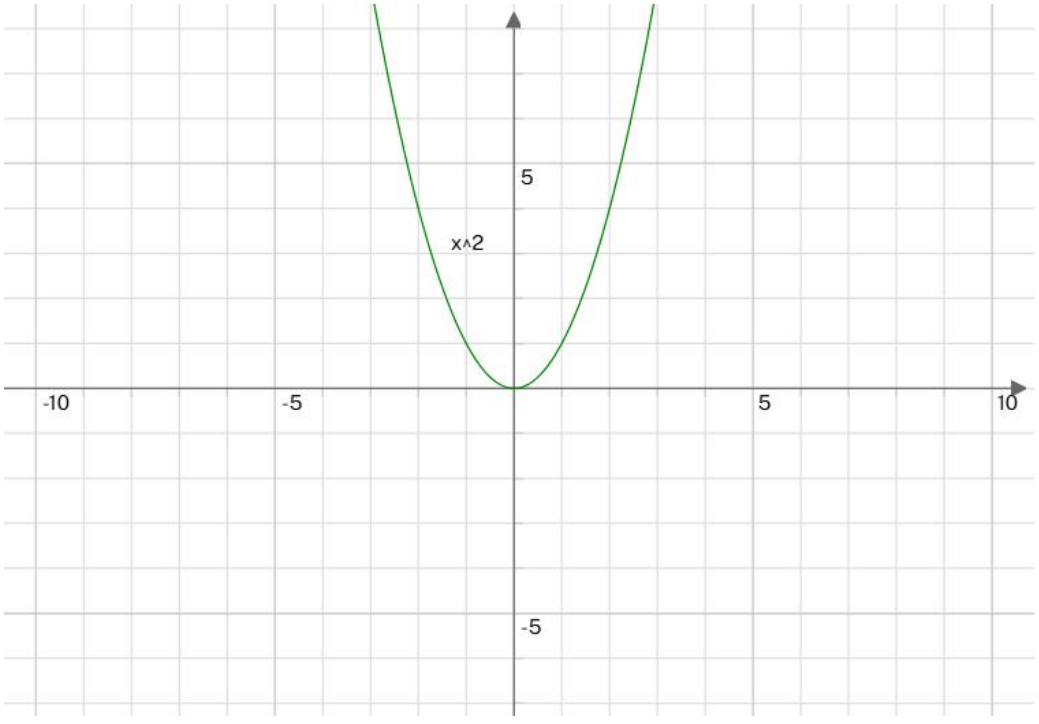
幂函数

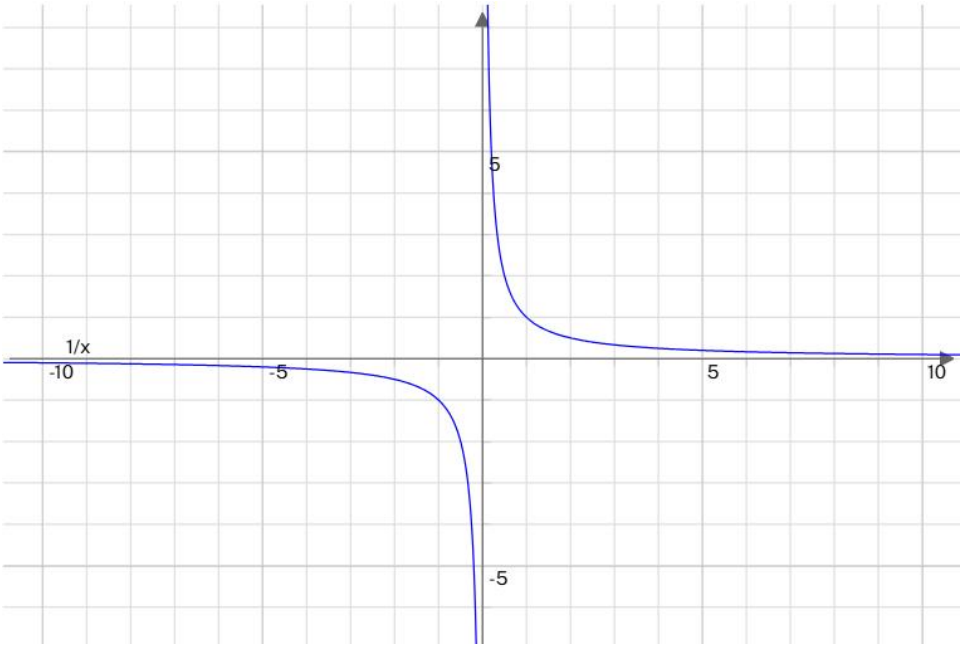
1. **整数指数幂**
   - **正整数指数幂**：对于任意正整数n，$a^n = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n个a}$，其中$a$是底数，$n$是指数。例如，$2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$。
   - **零指数幂**：规定$a^0 = 1(a \neq 0)$。因为从同底数幂的除法法则$a^m \div a^n = a^{m-n}$（$a \neq 0$，m, n是正整数且$m > n$）来考虑，当$m = n$时，就得到a^0，此时为了使这个法则在这种情况下也成立，所以规定$a^0 = 1(a \neq 0)$。例如，$3^0 = 1$。
   - **负整数指数幂**：$a^{-n} = \frac{1}{a^n}(a \neq 0, n是正整数)$。这也是从同底数幂的除法法则推导而来的，当$m < n$时，$a^m \div a^n = a^{m-n}$，此时$m - n$是负数，例如$2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$。

2. **分数指数幂**
   - 对于正分数指数幂，规定$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}(a \geqslant 0, m, n \in N^*, n > 1)$。例如，$4^{\frac{3}{2}} = \sqrt{4^3} = \sqrt{64} = 8$。它的意义可以这样理解，设$a^{\frac{m}{n}} = x$，则$(a^{\frac{m}{n}})^n = x^n$，即$a^m = x^n$，所以$x = \sqrt[n]{a^m}$。
   - 对于负分数指数幂，$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}(a > 0, m, n \in N^*, n > 1)$。例如，$8^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{8^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{8^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{64}} = \frac{1}{4}$。

3. **幂函数的一般形式**
   - 幂函数的一般表达式为$y = x^\alpha$，其中x是自变量，α是常数。不同的α值会导致幂函数具有不同的性质。
   - 当$\alpha = 1$时，$y = x$，这是一个正比例函数，其图象是一条过原点和$(1, 1)$点的直线，在R上单调递增。
   - 当$\alpha = 2$时，$y = x^2$，这是一个二次函数，图象是开口向上的抛物线，对称轴为y轴，在$(-\infty, 0)$上单调递减，在$(0, +\infty)$上单调递增。
   - 当$\alpha = -1$时，$y = \frac{1}{x} = x^{-1}$，其图象是双曲线，在$(-\infty, 0)$和$(0, +\infty)$上单调递减。


5
x^2
1/x
-10
-5
5
10
x
-5
Copyright © json.cn


5
x^2
-10
-5
5
10
-5



1. **同底数幂相乘**
   - 法则：同底数幂相乘，底数不变，指数相加。即$a^m \times a^n = a^{m+n}$（$a \neq 0$，m、n为整数）。
   - 例如：$2^3 \times 2^4$，底数$a = 2$，$m = 3$，$n = 4$，根据法则可得$2^3 \times 2^4 = 2^{3+4} = 2^7 = 128$。
   - 推导过程：根据幂的定义，$a^m = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{m个a}$，$a^n = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n个a}$。那么$a^m \times a^n$就是$m$个$a$与$n$个$a$相乘，总共是$(m + n)$个$a$相乘，所以$a^m \times a^n = a^{m+n}$。

2. **同底数幂相除**
   - 法则：同底数幂相除，底数不变，指数相减。即$a^m \div a^n = a^{m-n}$（$a \neq 0$，m、n为整数且$m \geqslant n$）。
   - 例如：$3^5 \div 3^2$，底数$a = 3$，$m = 5$，$n = 2$，根据法则可得$3^5 \div 3^2 = 3^{5-2} = 3^3 = 27$。
   - 推导过程：同样根据幂的定义，$a^m \div a^n = \dfrac{\underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{m个a}}{\underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n个a}}$，分子分母约去$n$个$a$后，剩下$(m - n)$个$a$，所以$a^m \div a^n = a^{m-n}$。当$m = n$时，就得到$a^0 = 1(a \neq 0)$这个特殊情况。

3. **幂的乘方**
   - 法则：幂的乘方，底数不变，指数相乘。即$(a^m)^n = a^{mn}$（$a \neq 0$，m、n为整数）。
   - 例如：$(2^3)^4$，底数$a = 2$，$m = 3$，$n = 4$，根据法则可得$(2^3)^4 = 2^{3\times4} = 2^{12} = 4096$。
   - 推导过程：$(a^m)^n$表示n个a^m相乘，即$(a^m)^n = \underbrace{a^m \times a^m \times \cdots \times a^m}_{n个a^m}$，根据同底数幂相乘法则，可得$(a^m)^n = a^{m\times n}$。

4. **积的乘方**
   - 法则：积的乘方，先把积中的每一个乘数分别乘方，再把所得的幂相乘。即$(ab)^n = a^n b^n$（n为整数）。
   - 例如：$(2 \times 3)^4$，根据法则可得$(2 \times 3)^4 = 2^4 \times 3^4 = 16 \times 81 = 1296$。
   - 推导过程：$(ab)^n = \underbrace{(ab) \times (ab) \times \cdots \times (ab)}_{n个(ab)}$，根据乘法交换律和结合律，可得$(ab)^n = \underbrace{(a \times a \times \cdots \times a)}_{n个a} \times \underbrace{(b \times b \times \cdots \times b)}_{n个b} = a^n b^n$。

5. **商的乘方**
   - 法则：商的乘方，等于分子分母分别乘方，再相除。即$(\frac{a}{b})^n = \frac{a^n}{b^n}$（$b \neq 0$，$n$为整数）。
   - 例如：$(\frac{2}{3})^4$，根据法则可得$(\frac{2}{3})^4 = \frac{2^4}{3^4} = \frac{16}{81}$。
   - 推导过程：$(\frac{a}{b})^n = \underbrace{\frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \cdots \times \frac{a}{b}}_{n个\frac{a}{b}}$，将分子分母分别相乘，可得$(\frac{a}{b})^n = \frac{\underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n个a}}{\underbrace{b \times b \times \cdots \times b}_{n个b}} = \frac{a^n}{b^n}$

二次函数

1. **二次函数的定义**
   - 一般地，形如$y=ax^2+bx+c$（a、b、c是常数，$a\neq 0$）的函数，叫做二次函数。其中x是自变量，y是因变量。例如$y=2x^2+3x-1$就是一个二次函数。
   - 当$b=c=0$时，二次函数变为$y=ax^2$，这是二次函数的最简形式。
2. **二次函数的图象**
   - 二次函数的图象是一条抛物线。
   - 当$a>0$时，抛物线开口向上；当$a<0$时，抛物线开口向下。例如，$y=x^2$（$a=1>0$）的图象开口向上，而$y=-x^2$（$a=-1<0$）的图象开口向下。
   - 抛物线的对称轴为直线$x=-\frac{b}{2a}$。例如，对于二次函数$y=2x^2-4x+1$，$a=2$，$b=-4$，对称轴为$x=-\frac{-4}{2\times 2}=1$。
   - 抛物线的顶点坐标为$(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a})$。以$y=2x^2-4x+1$为例，将$x=1$代入可得$y=\frac{4\times 2\times 1-(-4)^2}{4\times 2}=\frac{8-16}{8}=-1$，顶点坐标为$(1,-1)$。

二次函数		$y=a(x-h)^2+k$	$y=ax^2+bx+c$
开口方向		$a>0$ 开口向上	
		$a<0$ 开口向下	
对称轴		$x=h$	$x=\frac{b}{2a}$
顶点坐标		(h,k)	$(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a})$
最值	a>0	$y_{最小}=k$	$y_{最小}=\frac{4ac-b^2}{4a}$
	a<0	$y_{最大}=k$	$y_{最大}=\frac{4ac-b^2}{4a}$
增减性	a>0	在对称轴左边,x↗ y↘;在对称轴右边, x↗ y↗	
	a<0	在对称轴左边,x↗ y↗;在对称轴右边,x↗ y↘	

知乎@老刘说数学

3. **二次函数的性质**
   - **单调性**：
     - 当$a>0$时，在对称轴左侧（即$x<-\frac{b}{2a}$），函数单调递减；在对称轴右侧（即$x>-\frac{b}{2a}$），函数单调递增。例如$y=x^2-2x$，对称轴为$x=1$，在$(-\infty,1)$上单调递减，在$(1,+\infty)$上单调递增。
     - 当$a<0$时，在对称轴左侧（$x<-\frac{b}{2a}$），函数单调递增；在对称轴右侧（$x>-\frac{b}{2a}$），函数单调递减。如$y=-x^2+2x$，对称轴为$x=1$，在$(-\infty,1)$上单调递增，在$(1,+\infty)$上单调递减。
   - **最值**：
     - 当$a>0$时，函数有最小值，最小值为$y=\frac{4ac-b^2}{4a}$，在$x=-\frac{b}{2a}$处取得。例如$y=3x^2+6x-1$，$a=3$，$b=6$，$c=-1$，根据公式可得最小值为$y=\frac{4\times3\times(-1)-6^2}{4\times3}=\frac{-12-36}{12}=-4$，在$x=-\frac{6}{2\times3}=-1$处取得。
     - 当$a<0$时，函数有最大值，最大值为$y=\frac{4ac-b^2}{4a}$，在$x=-\frac{b}{2a}$处取得。比如$y=-2x^2+4x+3$，$a=-2$，$b=4$，$c=3$，最大值为$y=\frac{4\times(-2)\times3-4^2}{4\times(-2)}=\frac{-24-16}{-8}=5$，在$x=-\frac{4}{2\times(-2)}=1$处取得。

4. **二次函数与一元二次方程的关系**
   - 二次函数$y=ax^2+bx+c$（$a\neq0$），当$y=0$时，就变成了一元二次方程$ax^2+bx+c=0$（$a\neq0$）。
   - 一元二次方程的根就是二次函数图象与x轴交点的横坐标。例如，对于二次函数$y=x^2-3x+2$，令$y=0$，则$x^2-3x+2=0$，解得$x=1$或$x=2$，这两个值就是函数图象与x轴交点的横坐标。
   - 判别式$\Delta=b^2-4ac$可以用来判断二次函数图象与x轴的交点个数：
     - 当$\Delta>0$时，二次函数图象与x轴有两个不同的交点。
     - 当$\Delta=0$时，二次函数图象与x轴有一个交点，即顶点在x轴上。
     - 当$\Delta<0$时，二次函数图象与x轴没有交点。

二次函数$y=ax^2+bx+c$的图象和x轴交点	一元二次方程$ax^2+bx+c=0$的根	一元二次方程$ax^2+bx+c=0$根的判别式（b^2-4ac）
有两个交点	有两个相异的实数根	$b^2-4ac>0$
有一个交点	有两个相等的实数根	$b^2-4ac=0$
没有交点	没有实数根	$b^2-4ac<0$

知乎 @老刘说数学

二次函数的求解通常涉及以下几个方面：

一、求二次函数的零点（即与x轴交点的横坐标）

1. **公式法（利用求根公式）**

对于一元二次方程$ax^2+bx+c=0$（$a\neq 0$），其求根公式为$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$。当二次函数$y=ax^2+bx+c$（$a\neq 0$）时，令$y=0$就得到对应的一元二次方程，可使用此求根公式来求解函数的零点。

例如，对于二次函数$y=x^2-3x-4$，这里$a=1$，$b=-3$，$c=-4$，先计算判别式

$\Delta=b^2-4ac=(-3)^2-4\times 1\times(-4)=9+16=25$。

然后将其代入求根公式可得：

$$x=\frac{-(-3)\pm\sqrt{25}}{2\times 1}=\frac{3\pm 5}{2},$$

即$x_1=\dfrac{3+5}{2}=4$，$x_2=\dfrac{3-5}{2}=-1$，这两个值就是二次函数与x轴交点的横坐标。

2. **因式分解法**

如果二次函数对应的一元二次方程能够进行因式分解，那么可以通过因式分解来求解零点。

例如，对于二次函数$y=x^2-5x+6$，对应的一元二次方程$x^2-5x+6=0$可因式分解为

$$(x-2)(x-3)=0,$$

则由$x-2=0$可得$x=2$，由$x-3=0$可得$x=3$，即函数的零点为2和3。

3. **配方法**

先将二次函数通过配方转化为完全平方式的形式，再求解方程。

例如，对于二次函数$y = x^2 + 4x - 1$，进行配方：

$$\begin{aligned} y &= x^2 + 4x - 1 \\ &= x^2 + 4x + 4 - 4 - 1 \\ &= (x + 2)^2 - 5 \end{aligned}$$

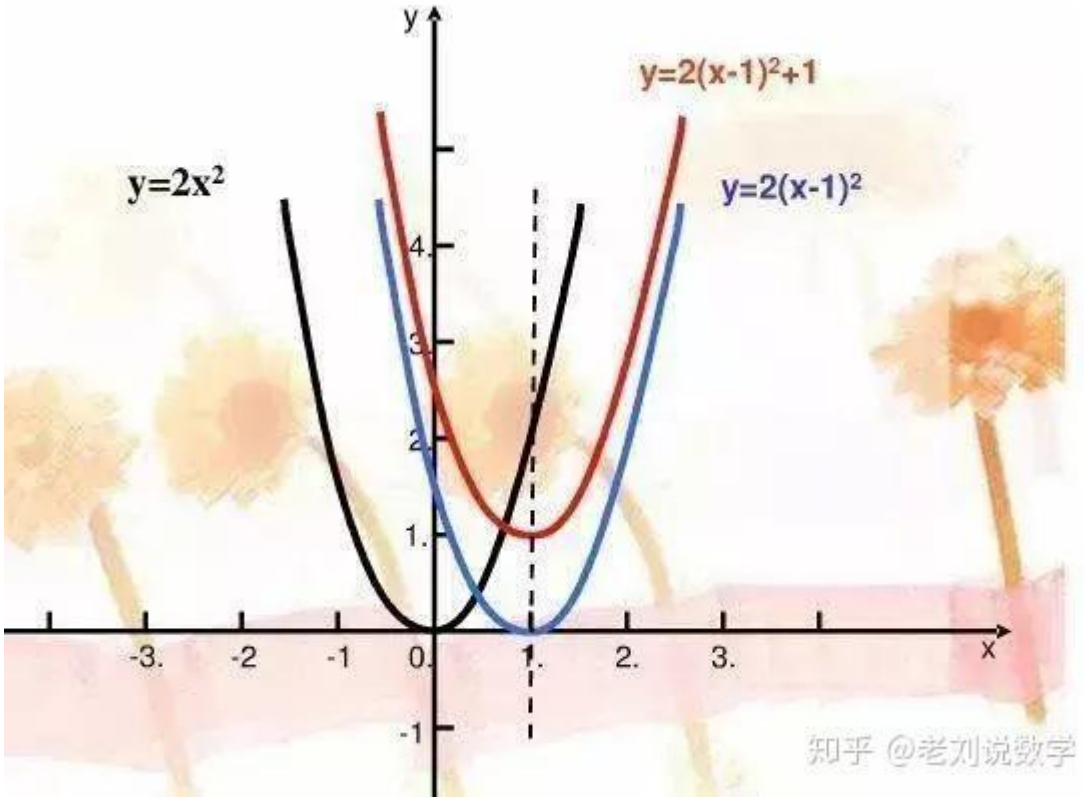
令$y = 0$，则$(x + 2)^2 - 5 = 0$，即$(x + 2)^2 = 5$，

解得$x + 2 = \pm\sqrt{5}$，

所以$x = -2 \pm \sqrt{5}$，这就是函数的零点。

1. **完全平方和公式**
   - **公式内容**：$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$。
   - **推导过程**：
     - 根据乘法分配律$(a+b)^2=(a+b)(a+b)$，展开可得$a(a+b)+b(a+b)$。
     - 继续展开为$a^2+ab+ba+b^2$，由于$ab=ba$，所以最终结果是$a^2+2ab+b^2$。
   - **示例**：计算$(3+2)^2$，根据完全平方和公式，$a=3$，$b=2$，则
     $(3+2)^2=3^2+2\times3\times2+2^2=9+12+4=25$。
2. **完全平方差公式**
   - **公式内容**：$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$。
   - **推导过程**：
     - 同样根据乘法分配律$(a-b)^2=(a-b)(a-b)$，展开得到$a(a-b)-b(a-b)$。
     - 进一步展开为$a^2-ab-ba+b^2$，因为$ab=ba$，所以结果是$a^2-2ab+b^2$。
   - **示例**：计算$(5-3)^2$，这里$a=5$，$b=3$，根据公式可得
     $(5-3)^2=5^2-2\times5\times3+3^2=25-30+9=4$。

3. **在因式分解中的应用**
   - 完全平方公式的逆用可以进行因式分解。
   - 例如，对于式子x^2+6x+9，可以发现它符合完全平方和公式$a^2+2ab+b^2$的形式，其中$a=x$，$b=3$（因为$2ab=2\times x\times 3=6x$），所以$x^2+6x+9=(x+3)^2$。
   - 再如，$4x^2-12x+9$，可以写成$(2x)^2-2\times(2x)\times 3+3^2$，符合完全平方差公式，因式分解后为$(2x-3)^2$。
4. **在二次函数中的应用**
   - 在二次函数$y=ax^2+bx+c$（$a\neq 0$）中，通过配方将其转化为顶点式$y=a(x-h)^2+k$的过程会用到完全平方公式。
   - 例如，对于二次函数$y=x^2+4x-1$，配方如下：
     - 首先，在x^2+4x这部分进行配方，$y=x^2+4x+4-4-1$。
     - 前面x^2+4x+4可以写成$(x+2)^2$，所以$y=(x+2)^2-5$，这样就将二次函数转化为顶点式，方便研究函数的性质，如顶点坐标为$(-2,-5)$，对称轴为$x=-2$。



1. **一元二次函数的一般形式和顶点式的表达式**
   - 一元二次函数的一般形式是$y = ax^2 + bx + c$（$a \neq 0$）。
   - 顶点式是$y = a(x - h)^2 + k$（$a \neq 0$），其中(h, k)是抛物线的顶点坐标。
2. **从一般形式推导顶点式（配方过程）**
   - 对于$y = ax^2 + bx + c$（$a \neq 0$），我们通过配方来将其转化为顶点式。
   - 首先提出二次项系数a，得到$y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c$。
   - 然后在括号内进行配方，对于$x^2 + \frac{b}{a}x$，需要加上一次项系数一半的平方，即$\left(\frac{b}{2a}\right)^2$，同时为了保持等式相等，需要在括号外减去$a \times \left(\frac{b}{2a}\right)^2$。
   - 则$y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) + c$。
   - 进一步化简可得$y = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right] + c$。
   - 展开式子得到$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - a \times \frac{b^2}{4a^2} + c$，即$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$。
   - 令$h = -\frac{b}{2a}$，$k = \frac{4ac - b^2}{4a}$，就得到顶点式$y = a(x - h)^2 + k$。

二、求二次函数的顶点坐标

1. **利用顶点坐标公式**

   二次函数$y = ax^2 + bx + c$（$a \neq 0$）的顶点坐标为$(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a})$。

   例如，对于二次函数$y = 2x^2 - 8x + 3$，其中$a = 2$，$b = -8$，$c = 3$，

   对称轴$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-8}{2 \times 2} = 2$，

   将$x = 2$代入函数可得：

   $$\begin{aligned} y &= 2 \times 2^2 - 8 \times 2 + 3 \\ &= 8 - 16 + 3 \\ &= -5 \end{aligned}$$

   所以顶点坐标为$(2, -5)$。

2. **通过配方转化来确定顶点坐标**

如前面配方法中提到的，将二次函数配方成$y=a(x-h)^2+k$的形式（$a\neq 0$），其顶点坐标就是(h,k)。

例如，$y=x^2+6x+5$，配方可得：

$$\begin{aligned}y&=x^2+6x+5\\&=x^2+6x+9-9+5\\&=(x+3)^2-4\end{aligned}$$

所以顶点坐标为$(-3,-4)$。

三、求二次函数在某一区间内的最值

1. 先确定对称轴与给定区间的位置关系

若二次函数$y=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$，对称轴为$x=-\dfrac{b}{2a}$。

例如，求二次函数$y=-x^2+2x+3$在区间$[0,3]$内的最值。

先求对称轴$x=-\dfrac{2}{2\times(-1)}=1$。

2. **分情况讨论最值**

- **当对称轴在给定区间内时**：

  如果$a>0$，函数在对称轴处取得最小值，比较区间端点处函数值大小可得最大值；如果$a<0$，函数在对称轴处取得最大值，比较区间端点处函数值大小可得最小值。

  对于$y=-x^2+2x+3$（$a=-1<0$），对称轴$x=1$在区间$[0,3]$内，当$x=1$时，

  $y=-1+2+3=4$，取得最大值。

  再比较端点值，当$x=0$时，$y=3$；当$x=3$时，$y=-9+6+3=0$，所以最小值为0。

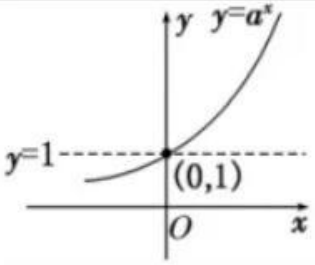
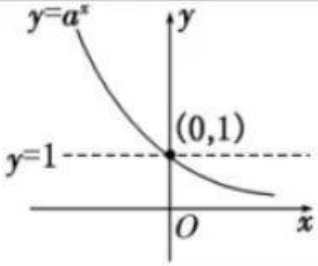
- **当对称轴不在给定区间内时**：

  若对称轴在区间左侧（$x<-\dfrac{b}{2a}$），对于$a>0$，函数在区间上单调递增，区间左端点值为最小值，右端点值为最大值；对于$a<0$，函数在区间上单调递减，区间右端点值为最小值，左端点值为最大值。

  若对称轴在区间右侧（$x>-\dfrac{b}{2a}$），情况与之类似，按单调性判断最值所在位置。

指数

1. **指数函数的定义**
   - 一般地，函数$y=a^x$（$a>0$且$a\neq 1$）叫做指数函数，其中x是自变量，函数的定义域是R（实数集）。例如$y=2^x$、$y=3^x$、$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$都是指数函数。需要注意的是，像$y=2^{-x}$可以变形为$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$，它也是指数函数；而$y=x^2$不是指数函数，因为底数是自变量$x$，不符合指数函数的定义。
2. **指数函数的图象**
   - 当$a>1$时，指数函数$y=a^x$的图象是上升的曲线，且恒过点$(0,1)$。例如$y=2^x$的图象，当$x=0$时，$y=2^0=1$。随着x的增大，y的值增长得越来越快。
   - 当$0<a<1$时，指数函数$y=a^x$的图象是下降的曲线，同样恒过点$(0,1)$。例如$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$，当$x=0$时，$y=\left(\frac{1}{2}\right)^0=1$。随着$x$的增大，$y$的值越来越小，趋近于0。

		$a>1$	$0<a<1$
图　象			
性质	定义域	R	
	值域	(0，+∞)	
	过定点	过点(0,1)　即 $x=0$ 时，$y=1$	
	单调性	是 R 上的增函数	是 R 上的减函数

知乎@学不明白的数学

3. **指数函数的性质**
   - **单调性**：
     - 当$a>1$时，函数$y=a^x$在R上单调递增。即对于任意的$x_1<x_2$，都有$a^{x_1}<a^{x_2}$。例如，对于$y=3^x$，当$x_1=1$，$x_2=2$时，$3^1=3$，$3^2=9$，因为$1<2$，所以$3^1<3^2$。
     - 当$0<a<1$时，函数$y=a^x$在R上单调递减。即对于任意的$x_1<x_2$，都有$a^{x_1}>a^{x_2}$。例如，对于$y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$，当$x_1=1$，$x_2=2$时，$\left(\frac{1}{3}\right)^1=\frac{1}{3}$，$\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{9}$，因为$1<2$，所以$\left(\frac{1}{3}\right)^1>\left(\frac{1}{3}\right)^2$。
   - **值域**：
     - 指数函数$y=a^x$（$a>0$且$a\neq1$）的值域是$(0,+\infty)$。因为对于任何实数x，a^x恒大于0。当$a>1$且x趋近于$+\infty$时，$y=a^x$趋近于$+\infty$；当$0<a<1$且x趋近于$+\infty$时，$y=a^x$趋近于0，但始终大于0。
   - **函数值的变化规律**：
     - 当$a>1$时，底数a越大，函数图象上升得越快。例如，比较$y=2^x$和$y=3^x$，在相同的x增加值下，3^x的增长速度比2^x快。
     - 当$0<a<1$时，底数a越小，函数图象下降得越快。例如，比较$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$和$y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$，在相同的$x$增加值下，$\left(\frac{1}{3}\right)^x$的下降速度比$\left(\frac{1}{2}\right)^x$快。

4. **指数函数的运算性质**
   - 同底数幂相乘：$a^x\times a^y=a^{x+y}$（$a>0$且$a\neq1$，$x,y\in R$）。例如，$2^3\times2^4=2^{3+4}=2^7=128$。
   - 同底数幂相除：$a^x\div a^y=a^{x-y}$（$a>0$且$a\neq1$，$x,y\in R$）。例如，$3^5\div3^2=3^{5-2}=3^3=27$。
   - 幂的乘方：$(a^x)^y=a^{xy}$（$a>0$且$a\neq1$，$x,y\in R$）。例如，$(2^3)^4=2^{3\times4}=2^{12}=4096$。

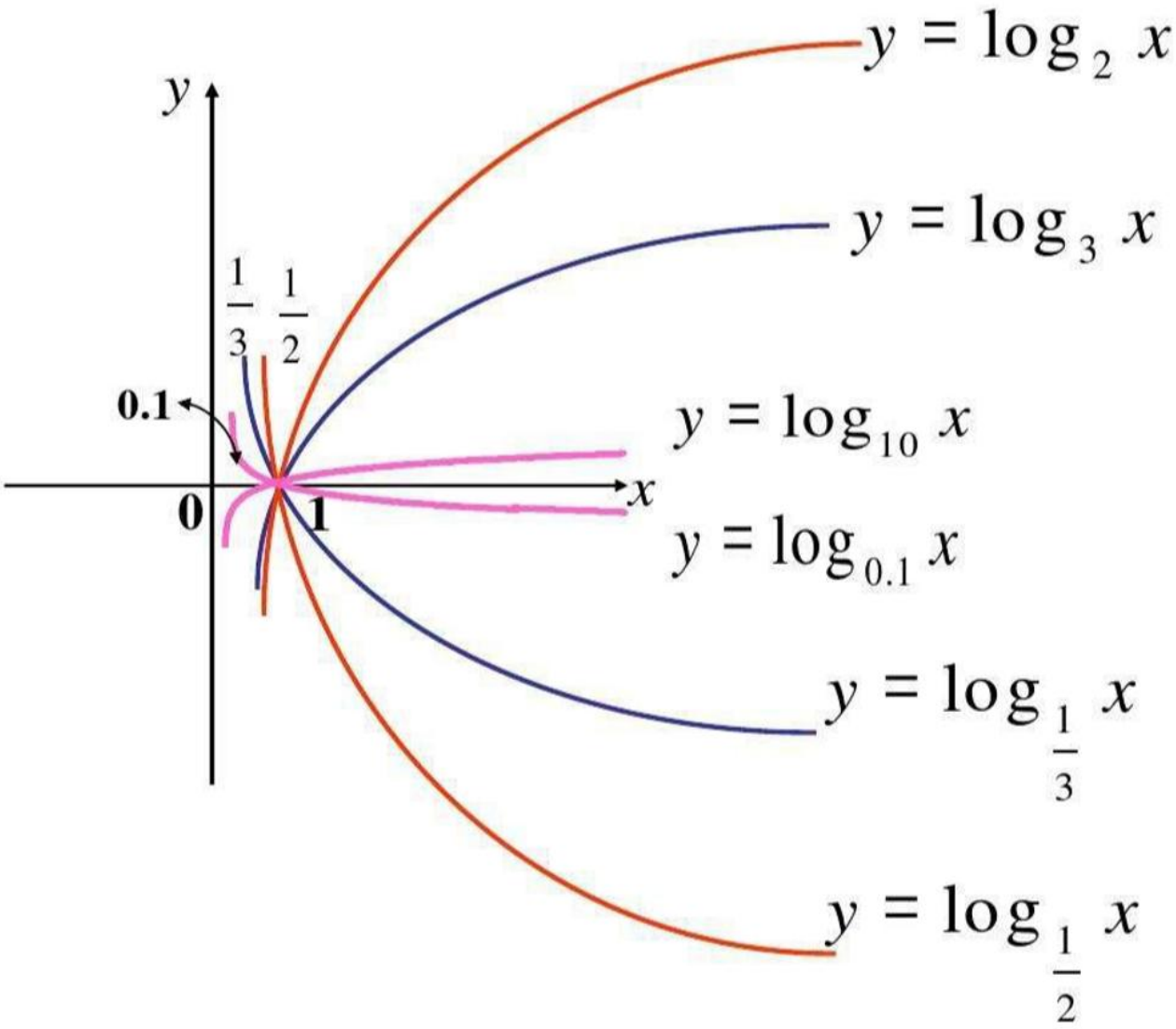
1. **同底数幂相乘**
   - **法则**：对于指数函数$y = a^x$（$a > 0$且$a \neq 1$），同底数幂相乘，底数不变，指数相加。即$a^m \times a^n = a^{m+n}$，其中$m, n \in R$。
   - **示例**：计算$2^3 \times 2^4$，根据此法则，底数$a = 2$，$m = 3$，$n = 4$，则$2^3 \times 2^4 = 2^{3+4} = 2^7 = 128$。
   - **推导过程**：根据指数的定义，a^m表示m个a相乘，a^n表示n个a相乘。那么$a^m \times a^n$就是m个a与n个a相乘，总共是$(m + n)$个a相乘，所以$a^m \times a^n = a^{m+n}$。
2. **同底数幂相除**
   - **法则**：同底数幂相除，底数不变，指数相减。即$a^m \div a^n = a^{m-n}$（$a > 0$且$a \neq 1$，$m, n \in R$且$m \geq n$）。
   - **示例**：计算$3^5 \div 3^2$，这里$a = 3$，$m = 5$，$n = 2$，则$3^5 \div 3^2 = 3^{5-2} = 3^3 = 27$。
   - **推导过程**：$a^m \div a^n = \frac{a^m}{a^n}$，由指数定义可知$a^m$是$m$个$a$相乘，$a^n$是$n$个$a$相乘。当$m \geq n$时，分子分母约去$n$个$a$后，剩下$(m - n)$个$a$，所以$a^m \div a^n = a^{m-n}$。当$m = n$时，就得到$a^0 = 1 (a > 0且a \neq 1)$这个特殊情况。
3. **幂的乘方**
   - **法则**：幂的乘方，底数不变，指数相乘。即$(a^m)^n = a^{mn}$（$a > 0$且$a \neq 1$，$m, n \in R$）。
   - **示例**：计算$(2^3)^4$，其中$a = 2$，$m = 3$，$n = 4$，根据法则可得$(2^3)^4 = 2^{3\times4} = 2^{12} = 4096$。
   - **推导过程**：$(a^m)^n$表示n个a^m相乘，即$(a^m)^n = \underbrace{a^m \times a^m \times \cdots \times a^m}_{n个a^m}$。根据同底数幂相乘法则，$a^m \times a^m = a^{m+m} = a^{2m}$，以此类推，$n$个$a^m$相乘结果为$a^{mn}$。
4. **指数函数的复合运算**
   - 当指数函数作为复合函数的一部分时，例如$y = a^{f(x)}$，其运算法则同样遵循上述基本法则。
   - 若计算$a^{f(x)} \times a^{g(x)}$，则根据同底数幂相乘法则可得$a^{f(x)} \times a^{g(x)} = a^{f(x)+g(x)}$。
   - 若计算$(a^{f(x)})^{g(x)}$，根据幂的乘方法则可得$(a^{f(x)})^{g(x)} = a^{f(x)g(x)}$。

5. **零指数幂和负指数幂**
   - **零指数幂**：规定$a^0 = 1(a > 0且a \neq 1)$。这是因为根据同底数幂相除法则，$a^m \div a^m = a^{m-m} = a^0$，而$a^m \div a^m = 1$，所以$a^0 = 1$。
   - **负指数幂**：$a^{-n} = \frac{1}{a^n}(a > 0且a \neq 1, n \in R)$。这也是从同底数幂相除法则推导而来的，例如$a^0 \div a^n = a^{0-n} = a^{-n}$，而$a^0 = 1$，所以$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$。

对数

1. **对数的定义**
   - 如果$a^x = N$（$a > 0$，且$a \neq 1$），那么数x叫做以a为底N的对数，记作$x = \log_a N$。例如，因为$2^3 = 8$，所以$\log_2 8 = 3$。其中，a叫做对数的底数，N叫做真数。
   - 对数式$x = \log_a N$与指数式$a^x = N$是可以相互转化的两种表达形式，这两种形式能够帮助我们在不同的数学情境下进行计算和分析。
2. **对数的性质**
   - **对数恒等式**：$a^{\log_a N} = N$（$a > 0$，且$a \neq 1$，$N > 0$）。例如，$3^{\log_3 5} = 5$，这个性质体现了对数运算和指数运算的互逆关系。
   - **零和负数没有对数**：因为对于任何$a > 0$，且$a \neq 1$，$a^x > 0$，所以对数中的真数N必须大于0。
   - **底数的对数为1**：$\log_a a = 1$（$a > 0$，且$a \neq 1$）。这是因为$a^1 = a$，根据对数的定义就有$\log_a a = 1$。例如，$\log_5 5 = 1$。
   - **1的对数为0**：$\log_a 1 = 0$（$a > 0$，且$a \neq 1$）。因为$a^0 = 1$，所以$\log_a 1 = 0$。例如，$\log_7 1 = 0$。

3. **对数运算法则**
   - **加法法则（对数的乘积运算）**：$\log_a(MN) = \log_a M + \log_a N$（$a > 0$，且$a \neq 1$，$M > 0$，$N > 0$）。例如，$\log_2(4 \times 8) = \log_2 4 + \log_2 8 = 2 + 3 = 5$。
   - **减法法则（对数的商运算）**：$\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$（$a > 0$，且$a \neq 1$，$M > 0$，$N > 0$）。例如，$\log_3 \frac{9}{3} = \log_3 9 - \log_3 3 = 2 - 1 = 1$。
   - **幂运算法则**：$\log_a M^n = n \log_a M$（$a > 0$，且$a \neq 1$，$M > 0$）。例如，$\log_2 8^2 = 2 \log_2 8 = 2 \times 3 = 6$。
4. **对数函数的定义**
   - 一般地，函数$y = \log_a x$（$a > 0$，且$a \neq 1$）叫做对数函数，其中x是自变量，函数的定义域是$(0, +\infty)$。例如，$y = \log_3 x$和$y = \log_{\frac{1}{2}} x$都是对数函数。
5. **对数函数的图象和性质**
   - **图象**：
     - 当$a > 1$时，对数函数$y = \log_a x$的图象是一条过点$(1, 0)$且在$(0, +\infty)$上单调递增的曲线。例如，$y = \log_2 x$的图象在$(0, +\infty)$上从左向右逐渐上升。
     - 当$0 < a < 1$时，对数函数$y = \log_a x$的图象是一条过点$(1, 0)$且在$(0, +\infty)$上单调递减的曲线。例如，$y = \log_{\frac{1}{3}} x$的图象在$(0, +\infty)$上从左向右逐渐下降。
   - **性质**：
     - **单调性**：
       - 当$a > 1$时，在$(0, +\infty)$上单调递增，即若$x_1 < x_2$，则$\log_a x_1 < \log_a x_2$。
       - 当$0 < a < 1$时，在$(0, +\infty)$上单调递减，即若$x_1 < x_2$，则$\log_a x_1 > \log_a x_2$。
     - **值域**：对数函数的值域是R（全体实数）。
     - **函数值变化特点**：
       - 当$a > 1$时，x越接近0，函数值y越小且趋近于负无穷；x越大，函数值y越大。
       - 当$0 < a < 1$时，x越接近0，函数值y越大且趋近于正无穷；x越大，函数值y越小。


y = log 2 x
y = log 3 x
y = log 10 x
y = log 0.1 x
y = log 1/3 x
y = log 1/2 x
y
x
0
1
0.1
1/3
1/2

三角函数

1. **弧度的定义**
   - 弧度是度量角的一种单位。在一个圆中，把长度等于半径的弧所对的圆心角定义为 1 弧度的角。
   - 假设圆的半径为r，弧长为l，那么该弧所对圆心角的弧度数$\theta = \frac{l}{r}$。例如，若弧长$l = 2r$，那么对应的圆心角为$\theta = \frac{2r}{r} = 2$弧度。
2. **弧度与角度的关系**
   - 一个圆周的角度是360°，对应的弧长是圆周长$C = 2\pi r$。根据弧度的定义，一个圆周对应的弧度是$\frac{2\pi r}{r} = 2\pi$弧度。
   - 由此可以得到角度与弧度的转换关系：$1^\circ = \frac{\pi}{180}$弧度，1弧度$= \frac{180^\circ}{\pi}$。例如，要将$60^\circ$转换为弧度，根据公式可得$60 \times \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{3}$弧度；若要将$\frac{\pi}{4}$弧度转换为角度，计算$\frac{\pi}{4} \times \frac{180^\circ}{\pi} = 45^\circ$。

一般角度与弧度的转换公式

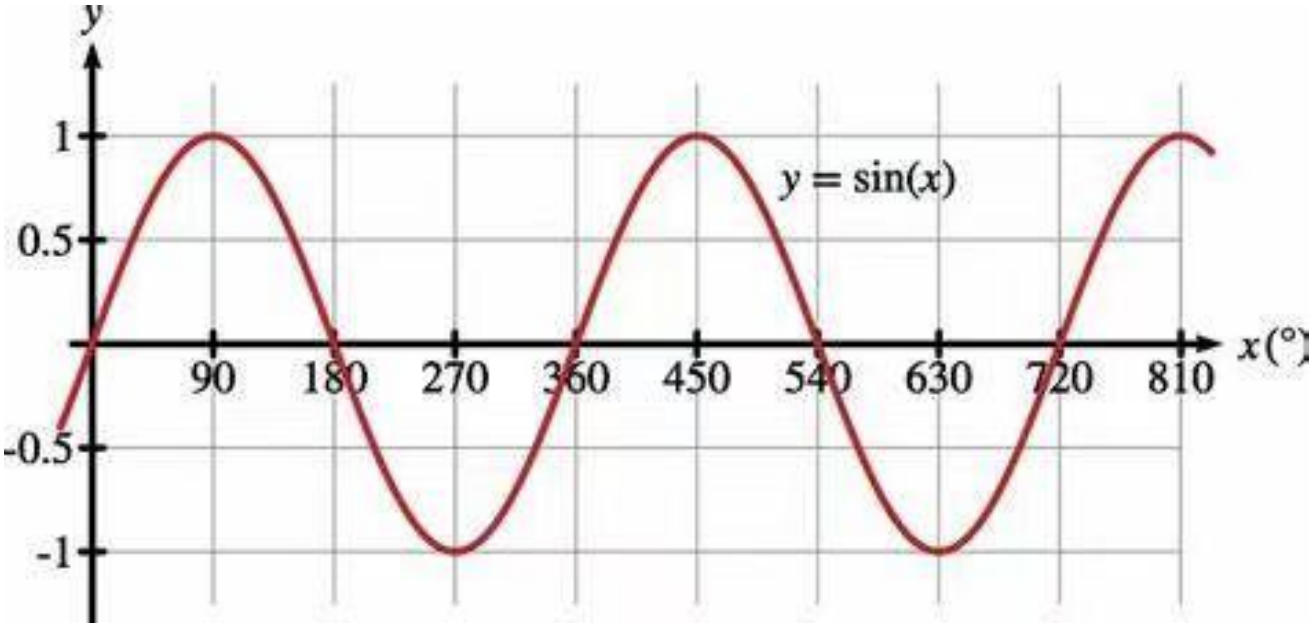
- 角度转弧度：设角度为n°，则对应的弧度为$\frac{n\pi}{180}$。
- 弧度转角度：设弧度为m，则对应的角度为$\frac{180m}{\pi}$。

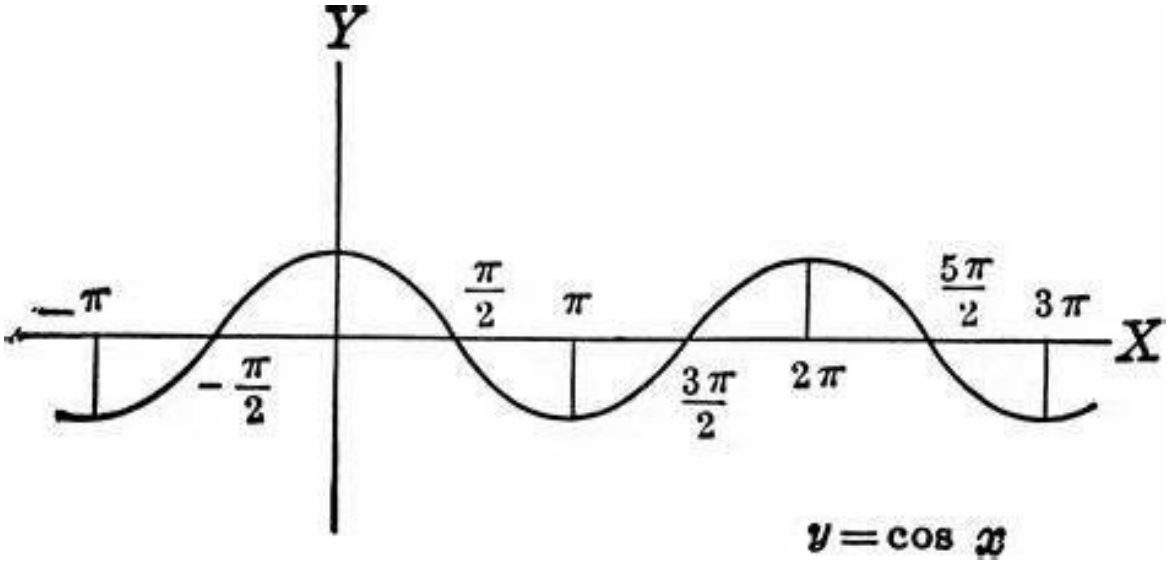
角度（°）	弧度
0	0
30	$\frac{\pi}{6}$
45	$\frac{\pi}{4}$
60	$\frac{\pi}{3}$
90	$\frac{\pi}{2}$
120	$\frac{2\pi}{3}$
135	$\frac{3\pi}{4}$
150	$\frac{5\pi}{6}$
180	π
210	$\frac{7\pi}{6}$
225	$\frac{5\pi}{4}$
240	$\frac{4\pi}{3}$
270	$\frac{3\pi}{2}$
300	$\frac{5\pi}{3}$
315	$\frac{7\pi}{4}$
330	$\frac{11\pi}{6}$
360	2π

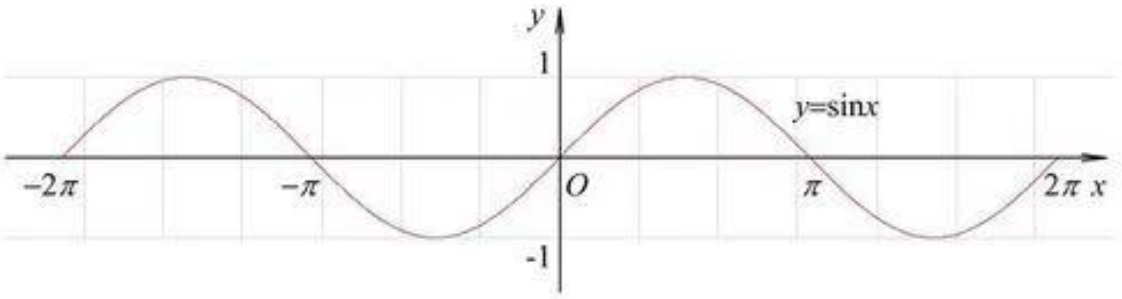
以下是这些对应关系的简单推导：

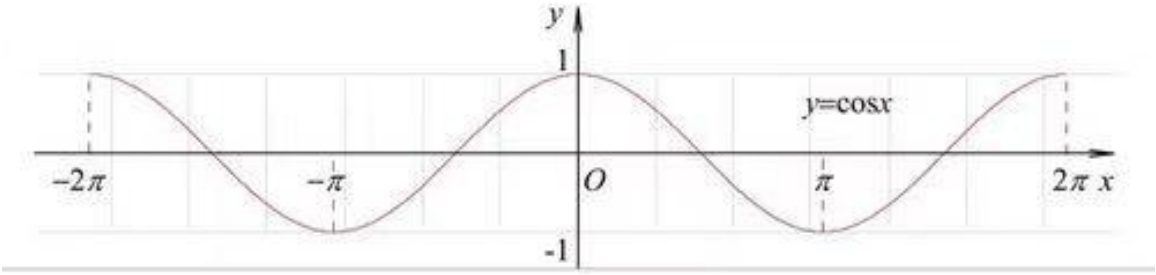
1. **特殊角度推导示例**
   - 对于30°：
     - 因为一个圆周是360°，对应的弧度是2π。
     - 那么30°占360°的比例为$\frac{30}{360}=\frac{1}{12}$。
     - 所以30°对应的弧度为$\frac{1}{12}\times 2\pi=\frac{\pi}{6}$。
   - 对于45°：
     - 45°占360°的比例为$\frac{45}{360}=\frac{1}{8}$。
     - 对应的弧度为$\frac{1}{8}\times 2\pi=\frac{\pi}{4}$。

1. **锐角三角函数的定义**
   - 在直角三角形ABC中（$\angle C = 90^\circ$），对于锐角A：
     - **正弦（$\sin A$）**：$\sin A = \frac{\text{对边}}{\text{斜边}} = \frac{a}{c}$。例如，在一个直角三角形中，对边$a = 3$，斜边$c = 5$，则$\sin A = \frac{3}{5}$。
     - **余弦（$\cos A$）**：$\cos A = \frac{\text{邻边}}{\text{斜边}} = \frac{b}{c}$。例如，若邻边$b = 4$，斜边$c = 5$，则$\cos A = \frac{4}{5}$。
     - **正切（$\tan A$）**：$\tan A = \frac{\text{对边}}{\text{邻边}} = \frac{a}{b}$。例如，当对边$a = 3$，邻边$b = 4$时，$\tan A = \frac{3}{4}$。

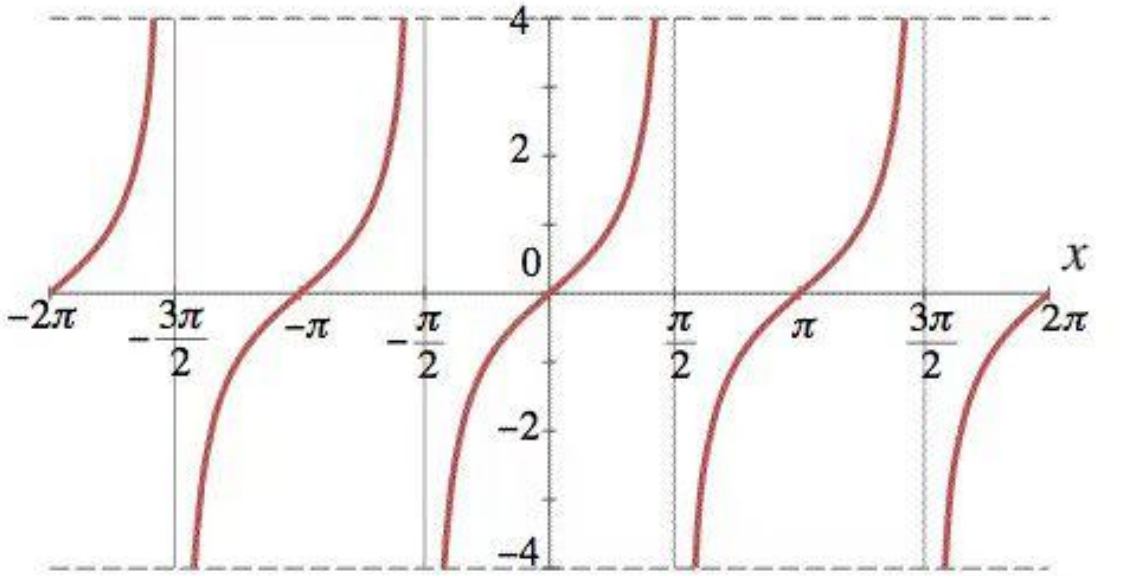








tan x



© CalculatorSoup.com

2. **特殊角的三角函数值**

   - 30°**角**：$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$，$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$，$\tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$。
   - 45°**角**：$\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$，$\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$，$\tan 45^\circ = 1$。
   - 60°**角**：$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$，$\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$，$\tan 60^\circ = \sqrt{3}$。

3. **三角函数之间的关系**

   - **同角三角函数关系**：
     - **平方关系**：$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$。例如，当$\sin A = \frac{3}{5}$时，$\cos A = \pm\sqrt{1 - (\frac{3}{5})^2} = \pm\frac{4}{5}$，因为$A$是锐角，所以$\cos A = \frac{4}{5}$。
     - **商数关系**：$\tan A = \frac{\sin A}{\cos A}$（$\cos A \neq 0$）。例如，已知$\sin A = \frac{1}{2}$，$\cos A = \frac{\sqrt{3}}{2}$，则$\tan A = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$。
   - **互余两角的三角函数关系**：若$\angle A + \angle B = 90^\circ$，则$\sin A = \cos B$，$\cos A = \sin B$，$\tan A \times \tan B = 1$。例如，若$\angle A = 30^\circ$，$\angle B = 60^\circ$，$\sin 30^\circ = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$，$\tan 30^\circ \times \tan 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} \times \sqrt{3} = 1$。

角度（°）	弧度	sin值	cos值	tan值
0	0	0	1	0
30	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
90	$\frac{\pi}{2}$	1	0	不存在
120	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$

135	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1
150	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
180	π	0	-1	0
210	$\frac{7\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
225	$\frac{5\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
240	$\frac{4\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
270	$\frac{3\pi}{2}$	-1	0	不存在

300	$\frac{5\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$
315	$\frac{7\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1
330	$\frac{11\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
360	2π	0	1	0

1. **三角函数的周期性**
   - **正弦函数$y=\sin x$**：
     - 周期是2π。这意味着对于任意实数x，都有$\sin(x + 2\pi)=\sin x$。例如，$\sin(0)=\sin(2\pi)=0$，$\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+2\pi\right)=1$。从函数图象上看，正弦函数的图象是波浪状的，每隔$2\pi$的距离，图象就会重复出现一次。
   - **余弦函数$y=\cos x$**：
     - 它的周期同样是2π。即$\cos(x + 2\pi)=\cos x$。比如，$\cos(0)=\cos(2\pi)=1$，$\cos(\pi)=\cos(\pi + 2\pi)=-1$。余弦函数的图象也是每隔$2\pi$重复一次。
   - **正切函数$y=\tan x$**：
     - 周期是π。因为$\tan(x+\pi)=\tan x$，但要注意$x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in Z$（因为正切函数在这些点上没有定义）。例如，$\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)=\tan\left(\frac{\pi}{4}+\pi\right)=1$。正切函数图象是由一系列间断的分支组成，每隔$\pi$重复。

2. **三角函数的诱导公式**
   - $\sin(-x) = -\sin x$**和**$\cos(-x) = \cos x$：
     - 这组公式体现了正弦函数是奇函数，余弦函数是偶函数。例如，$\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$，$\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$。从图象上理解，$y = \sin x$的图象关于原点对称，$y = \cos x$的图象关于$y$轴对称。
   - $\sin(\pi - x) = \sin x$**和**$\cos(\pi - x) = -\cos x$：
     - 对于$\sin(\pi - x) = \sin x$，例如$\sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$。从几何角度看，在单位圆中，$\pi - x$与$x$所对应的正弦值相等。对于$\cos(\pi - x) = -\cos x$，如$\cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\cos\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$，在单位圆中，$\pi - x$与$x$所对应的余弦值互为相反数。
   - $\sin(\pi + x) = -\sin x$**和**$\cos(\pi + x) = -\cos x$：
     - 以$\sin(\pi + x) = -\sin x$为例，$\sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$。从单位圆角度，$\pi + x$与$x$的正弦值互为相反数。对于$\cos(\pi + x) = -\cos x$，$\cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$，$\pi + x$与$x$的余弦值互为相反数。
   - $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$**和**$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$：
     - 例如$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$，$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$。在单位圆中，$\frac{\pi}{2} - x$的正弦值等于$x$的余弦值，$\frac{\pi}{2} - x$的余弦值等于$x$的正弦值。
   - $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$**和**$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$：
     - 比如$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$，$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = -\sin\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$。在单位圆里可以直观地理解这些公式所体现的角度变化与函数值变化的关系。

集合和区间

1. **集合的基本概念和公式**
   - **集合的表示方法**：
     - **列举法**：将集合中的元素一一列举出来，例如$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$，表示集合A由1、2、3、4、5这五个元素组成。
     - **描述法**：用集合所含元素的共同特征表示集合，例如$B = \{x | x > 0 且 x \in R\}$，表示集合$B$是由所有大于0的实数组成的集合。
   - **集合间的基本关系**：
     - **子集**：如果集合A的任意一个元素都是集合B的元素，那么集合A称为集合B的子集，记作$A \subseteq B$。例如，若$A = \{1, 2\}$，$B = \{1, 2, 3\}$，则$A \subseteq B$。如果$A \subseteq B$且$B \subseteq A$，那么$A = B$。
     - **真子集**：如果$A \subseteq B$，且$A \neq B$，那么集合A称为集合B的真子集，记作$A \subsetneq B$。例如，若$A = \{1, 2\}$，$B = \{1, 2, 3\}$，则$A \subsetneq B$。
     - **空集**：不含任何元素的集合叫做空集，记作$\varnothing$。空集是任何集合的子集，即$\varnothing \subseteq A$，对任意集合A都成立。

   - **集合的运算公式**：
     - **交集**：由所有属于集合A且属于集合B的元素所组成的集合，叫做集合A与B的交集，记作$A \cap B$，即$A \cap B = \{x | x \in A 且 x \in B\}$。例如，若$A = \{1, 2, 3\}$，$B = \{2, 3, 4\}$，则$A \cap B = \{2, 3\}$。
     - **并集**：由所有属于集合A或属于集合B的元素所组成的集合，叫做集合A与B的并集，记作$A \cup B$，即$A \cup B = \{x | x \in A 或 x \in B\}$。例如，若$A = \{1, 2, 3\}$，$B = \{2, 3, 4\}$，则$A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$。
     - **补集**：设U是一个全集，A是U的一个子集，由U中所有不属于A的元素组成的集合，叫做子集A在全集U中的补集，记作$\complement_U A$，即$\complement_U A = \{x | x \in U 且 x \notin A\}$。例如，若$U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$，$A = \{1, 2\}$，则$\complement_U A = \{3, 4, 5\}$。

2. **区间的基本概念和公式**
   - **区间的定义和表示方法**：
     - **开区间**：设a，b是两个实数，且$a < b$，开区间(a, b)表示满足不等式$a < x < b$的所有实数x的集合。例如，区间$(1, 3)$表示所有大于1且小于3的实数组成的集合。
     - **闭区间**：闭区间$[a, b]$表示满足不等式$a \leq x \leq b$的所有实数x的集合。例如，区间$[2, 4]$表示所有大于等于2且小于等于4的实数组成的集合。
     - **半开半闭区间**：有两种情况，$[a, b)$表示满足$a \leq x < b$的所有实数x的集合；$(a, b]$表示满足$a < x \leq b$的所有实数x的集合。例如，区间$[1, 3)$表示所有大于等于1且小于3的实数组成的集合，区间$(2, 4]$表示所有大于2且小于等于4的实数组成的集合。
   - **区间与集合的联系**：区间是一种特殊的集合表示方式，主要用于表示实数轴上的一段连续的数集。例如，区间$(-\infty, +\infty)$就表示全体实数集R，从集合的角度可以写成$\{x|x \in R\}$。如果集合$A = \{x|1 < x < 3\}$，那么它可以用区间表示为$(1, 3)$。
   - **区间的运算**：
     - **区间的交集**：两个区间的交集是它们共有的部分。例如，若区间$A = [1, 3]$，区间$B = [2, 4]$，则$A \cap B = [2, 3]$。
     - **区间的并集**：两个区间的并集是包含这两个区间所有元素的区间。例如，若区间$A = [1, 3]$，区间$B = [2, 4]$，则$A \cup B = [1, 4]$。
     - **区间与补集（在实数集R的背景下）**：设区间$A = (a, b)$，它在R中的补集$\complement_R A = (-\infty, a] \cup [b, +\infty)$。例如，若$A = (1, 3)$，则$\complement_R A = (-\infty, 1] \cup [3, +\infty)$。

不等式

1. **不等式的基本概念**
   - 不等式是用不等号（大于>、小于<、大于等于≥、小于等于≤）连接两个数或代数表达式的式子。例如$3x + 2 > 5$，$x^2 - 1 \leq 0$等都是不等式。
2. **不等式的性质**
   - **传递性**：若$a > b$且$b > c$，则$a > c$。例如，$5 > 3$，$3 > 1$，那么$5 > 1$。
   - **加法性质**：不等式两边加（或减）同一个数（或式子），不等号的方向不变。即若$a > b$，则$a + c > b + c$。例如，若$x > 2$，那么$x + 3 > 2 + 3$，即$x + 3 > 5$。
   - **乘法性质**：
     - 不等式两边乘（或除以）同一个正数，不等号的方向不变。即若$a > b$，$c > 0$，则$ac > bc$（或$\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$）。例如，若$2x > 4$，两边同时除以$2$（正数），得到$x > 2$。
     - 不等式两边乘（或除以）同一个负数，不等号的方向改变。即若$a > b$，$c < 0$，则$ac < bc$（或$\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$）。例如，若$-3x > 6$，两边同时除以$-3$（负数），得到$x < -2$。

3. **一元一次不等式的解法**
   - 一元一次不等式的一般形式是$ax + b > 0$或$ax + b < 0$（$a \neq 0$）。
   - 例如，解不等式$2x - 3 > 5$。
     - 首先，移项可得$2x > 5 + 3$。
     - 然后，计算得$2x > 8$。
     - 最后，两边同时除以2，解得$x > 4$。
4. **一元一次不等式组的解法**
   - 一元一次不等式组是由几个一元一次不等式组成的不等式组。例如$\begin{cases} x - 1 > 0 \\ 2x + 1 < 7 \end{cases}$。
   - 求解步骤：
     - 分别求解每个不等式。对于$x - 1 > 0$，解得$x > 1$；对于$2x + 1 < 7$，移项可得$2x < 7 - 1$，即$2x < 6$，解得$x < 3$。
     - 综合两个不等式的解，取它们的交集，所以不等式组的解集为$1 < x < 3$。

5. **一元二次不等式的解法**
   - 一元二次不等式的一般形式是$ax^2+bx+c>0$或$ax^2+bx+c<0$（$a\neq0$）。
   - 例如，解不等式$x^2-3x+2>0$。
     - 先因式分解，得到$(x-1)(x-2)>0$。
     - 则有$\begin{cases}x-1>0\\x-2>0\end{cases}$或$\begin{cases}x-1<0\\x-2<0\end{cases}$。
     - 解第一个不等式组，得$x>2$；解第二个不等式组，得$x<1$。
     - 所以不等式的解集为$x<1$或$x>2$。
6. **绝对值不等式的解法**
   - 对于绝对值不等式$|x|<a$（$a>0$），其解集为$-a<x<a$。例如，$|x|<3$的解集是$-3<x<3$。
   - 对于绝对值不等式$|x|>a$（$a>0$），其解集为$x>a$或$x<-a$。例如，$|x|>2$的解集是$x>2$或$x<-2$。
   - 对于更复杂的绝对值不等式，如$|2x-1|<3$，可转化为$-3<2x-1<3$，然后分别求解不等式，得到$-1<x<2$。

基本不等式

1. **基本不等式的内容**
   - 对于任意正实数a、b，有$\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$，当且仅当$a=b$时，等号成立。
   - 例如，当$a=4$，$b=4$时，$\frac{4+4}{2}=\frac{8}{2}=4$，$\sqrt{4\times4}=\sqrt{16}=4$，此时等号成立。

基本不等式的应用

- **求最值**：
  - 已知$x>0$，求$y=x+\frac{1}{x}$的最小值。
  - 根据基本不等式$\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$，这里$a=x$，$b=\frac{1}{x}$，则$y=x+\frac{1}{x}\geq 2\sqrt{x\times\frac{1}{x}}=2$，当且仅当$x=\frac{1}{x}$，即$x=1$时，$y$取得最小值2。

1. 代数式求最值

例如：已知$x\in(0,\frac{1}{2})$，求函数$y=x(1-2x)$的最大值。

分析与解答：

首先对式子进行变形，因为$2x$与$(1-2x)$的和为定值1，为了能运用基本不等式，将函数$y=x(1-2x)$变形为$y=\frac{1}{2}\times 2x(1-2x)$。

根据基本不等式$\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$ $(a,b>0)$，这里令$a=2x$，$b=1-2x$，可得：

$$\frac{2x+(1-2x)}{2}\geq\sqrt{2x(1-2x)}$$
$$\frac{1}{2}\geq\sqrt{2x(1-2x)}$$

两边同时平方得$2x(1-2x)\leq\frac{1}{4}$，再乘以$\frac{1}{2}$，则$y=\frac{1}{2}\times 2x(1-2x)\leq\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$。

当且仅当$2x=1-2x$，即$x=\frac{1}{4}$时等号成立，所以y的最大值为$\frac{1}{8}$。

2. 与几何图形相关的最值问题

例如：用一段长为12米的篱笆围成一个矩形菜园，问这个矩形菜园的最大面积是多少？

分析与解答：

设矩形菜园的长为x米，那么宽为$\frac{12-2x}{2}=(6-x)$米，矩形面积$S=x(6-x)$。

同样对其变形为$S=x(6-x)\leq(\frac{x+(6-x)}{2})^2$（利用基本不等式$\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$，这里$a=x$，$b=6-x$）。

计算可得$S\leq(\frac{6}{2})^2=9$平方米。

当且仅当$x=6-x$，即$x=3$米时等号成立，此时矩形菜园的面积最大，为9平方米。

求定义域

1. **函数定义域的定义**
   - 定义域是指函数中自变量x的取值范围。在确定函数定义域时，需要考虑使函数表达式有意义的所有可能的x值。
2. **不同类型函数定义域的求法**
   - **整式函数**：
     - 对于形如$y=ax+b$（$a\neq0$）、$y=ax^2+bx+c$（$a\neq0$）等整式函数，其定义域为全体实数集R。因为对于任意实数x，整式运算都是有意义的。例如，$y=3x-1$，x可以取任何实数。
   - **分式函数**：
     - 对于形如$y=\frac{f(x)}{g(x)}$的分式函数，其定义域是使分母$g(x)\neq0$的实数x的集合。例如，对于函数$y=\frac{1}{x-2}$，要使函数有意义，则$x-2\neq0$，即$x\neq2$，所以该函数的定义域为$\{x|x\neq2\}$。
   - **根式函数**：
     - **偶次根式**：对于形如$y=\sqrt[n]{f(x)}$（n为偶数）的函数，其定义域是使$f(x)\geq0$的实数x的集合。例如，对于函数$y=\sqrt{x+3}$，要使函数有意义，则$x+3\geq0$，即$x\geq-3$，所以该函数的定义域为$\{x|x\geq-3\}$。

- **奇次根式**：对于形如$y=\sqrt[n]{f(x)}$（n为奇数）的函数，其定义域是全体实数集R。因为对于任意实数x，奇次根式都有意义。例如，$y=\sqrt[3]{x-1}$，x可以取任何实数。

- **对数函数**：
  - 对于形如$y=\log_a f(x)$（$a>0$且$a\neq 1$）的对数函数，其定义域是使$f(x)>0$的实数x的集合。例如，对于函数$y=\log_2(x-1)$，要使函数有意义，则$x-1>0$，即$x>1$，所以该函数的定义域为$\{x|x>1\}$。

- **三角函数**：
  - **正弦函数**$y=\sin x$**和余弦函数**$y=\cos x$：定义域为全体实数集R，因为对于任意实数x，$\sin x$和$\cos x$都有定义。
  - **正切函数**$y=\tan x$：其定义域是$\{x|x\neq k\pi+\frac{\pi}{2},k\in Z\}$。因为当$x=k\pi+\frac{\pi}{2}$（$k\in Z$）时，$\tan x$的分母$\cos x=0$，函数无定义。

3. **复合函数定义域的求法**
   - 对于复合函数$y=f(g(x))$，首先要确定内层函数$g(x)$的定义域，然后在这个定义域的基础上，确定使外层函数$f(u)$（这里$u=g(x)$）有意义的x的取值范围。
   - 例如，已知函数$y=\sqrt{x^2-1}$，令$u=x^2-1$，对于外层函数$y=\sqrt{u}$，需要$u\geq 0$，即$x^2-1\geq 0$，解不等式$(x+1)(x-1)\geq 0$，得到$x\leq -1$或$x\geq 1$，所以函数$y=\sqrt{x^2-1}$的定义域为$(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$。

一次函数

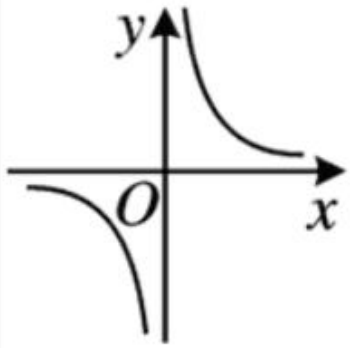
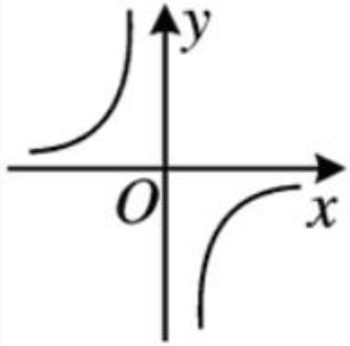
1. **定义**
   - 一次函数的一般式为$y = kx + b$（k，b为常数，$k \neq 0$）。其中x是自变量，y是因变量。例如$y = 2x + 1$、$y = -3x - 2$都是一次函数。当$b = 0$时，函数变为$y = kx$，这种形式叫做正比例函数，它是一次函数的特殊情况。例如$y = 3x$是正比例函数。
2. **图象**
   - 一次函数$y = kx + b$的图象是一条直线。
   - **斜率k的影响**：
     - k决定直线的倾斜程度。当$k > 0$时，直线从左向右上升；k的值越大，直线越陡峭。例如$y = 3x + 1$，$k = 3 > 0$，直线上升趋势明显。
     - 当$k < 0$时，直线从左向右下降；$|k|$的值越大，直线下降得越厉害。例如$y = -2x + 3$，$k = -2 < 0$，直线是下降的。
   - **截距b的影响**：
     - b是直线与y轴交点的纵坐标。当$x = 0$时，$y = b$。例如$y = 2x - 3$，$b = -3$，直线与y轴交点为$(0, -3)$。
3. **性质**
   - **单调性**：
     - 当$k > 0$时，函数在R（实数集）上单调递增。即对于任意的$x_1 < x_2$，都有$y_1 < y_2$。例如在$y = 4x + 1$中，若$x_1 = 1$，$x_2 = 2$，则$y_1 = 4 \times 1 + 1 = 5$，$y_2 = 4 \times 2 + 1 = 9$，因为$1 < 2$，所以$5 < 9$。
     - 当$k < 0$时，函数在R上单调递减。即对于任意的$x_1 < x_2$，都有$y_1 > y_2$。例如在$y = -3x + 2$中，若$x_1 = 1$，$x_2 = 2$，则$y_1 = -3 \times 1 + 2 = -1$，$y_2 = -3 \times 2 + 2 = -4$，因为$1 < 2$，所以$-1 > -4$。
   - **函数值的变化规律**：
     - 对于一次函数$y = kx + b$，当x增加1时，y的值增加k（当$k > 0$）或减少$|k|$（当$k < 0$）。例如在$y = 5x - 2$中，当x从3变为4（增加1）时，y从$5 \times 3 - 2 = 13$变为$5 \times 4 - 2 = 18$，y增加了5（即k的值）。

4. **求一次函数表达式**
   - **已知两点坐标(x_1, y_1)和(x_2, y_2)：**
     - 首先根据斜率公式$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$求出$k$的值（前提是$x_2 - x_1 \neq 0$）。
     - 然后把k的值和其中一个点的坐标代入$y = kx + b$，求出b的值。例如，已知一次函数经过点$(1, 3)$和$(3, 7)$，先求$k = \frac{7 - 3}{3 - 1} = \frac{4}{2} = 2$，再把$k = 2$和点$(1, 3)$代入$y = kx + b$，得到$3 = 2 \times 1 + b$，解得$b = 1$，所以一次函数表达式为$y = 2x + 1$。
5. **一次函数与方程、不等式的关系**
   - **与一元一次方程的关系：**
     - 一次函数$y = kx + b$（$k \neq 0$），当$y = 0$时，就得到一元一次方程$kx + b = 0$，其解$x = -\frac{b}{k}$就是一次函数图象与x轴交点的横坐标。例如对于$y = 3x - 6$，令$y = 0$，则$3x - 6 = 0$，解得$x = 2$，即函数图象与x轴交点为$(2, 0)$。
   - **与一元一次不等式的关系：**
     - 对于不等式$kx + b > 0$（或$kx + b < 0$），其解集可以通过一次函数图象来确定。当$k > 0$时，不等式$kx + b > 0$的解集是直线$y = kx + b$位于x轴上方部分对应的x的取值范围；不等式$kx + b < 0$的解集是直线位于x轴下方部分对应的x的取值范围。例如对于$y = 2x - 4$，解不等式$2x - 4 > 0$，从图象上看，就是求直线$y = 2x - 4$在x轴上方时x的取值范围，解得$x > 2$。

反比例函数

1. **反比例函数的定义**
   - 一般地，如果两个变量x、y之间的关系可以表示成$y = \frac{k}{x}$（k为常数，$k \neq 0$）的形式，那么称y是x的反比例函数。例如，$y = \frac{3}{x}$、$y = -\frac{2}{x}$都是反比例函数。
   - 反比例函数还可以写成$xy = k$（$k \neq 0$）的形式，这种形式在某些情况下更便于分析问题。
2. **反比例函数的图象**
   - **形状**：当$k > 0$时，反比例函数$y = \frac{k}{x}$的图象是位于第一、三象限的双曲线；当$k < 0$时，图象是位于第二、四象限的双曲线。例如，$y = \frac{2}{x}$的图象在第一、三象限，$y = -\frac{3}{x}$的图象在第二、四象限。
   - **渐近线**：双曲线无限接近于x轴和y轴，但永远不会与坐标轴相交。x轴和y轴是反比例函数图象的渐近线。从函数表达式$y = \frac{k}{x}$可以理解，当$x \to 0$时，$y \to \pm\infty$；当$y \to 0$时，$x \to \pm\infty$。
3. **反比例函数的性质**
   - **单调性**：
     - 当$k > 0$时，在每个象限内，y随x的增大而减小。例如，对于$y = \frac{4}{x}$，在第一象限内，当$x = 1$时，$y = 4$；当$x = 2$时，$y = 2$，随着x的增大，y减小。注意是在“每个象限内”，因为如果跨象限比较，当x从负数变为正数时，y的值是从负数变为正数，不满足单调递减的定义。
     - 当$k < 0$时，在每个象限内，y随x的增大而增大。例如，对于$y = -\frac{3}{x}$，在第二象限内，当$x = -1$时，$y = 3$；当$x = -2$时，$y = \frac{3}{2}$，随着x的增大，y增大。同样要注意是在每个象限内。
   - **对称性**：
     - 反比例函数的图象关于原点对称。这是因为对于任意一点(x, y)在反比例函数$y = \frac{k}{x}$的图象上，那么点$(-x, -y)$也在该图象上。例如，对于$y = \frac{2}{x}$，若点$(1, 2)$在图象上，那么点$(-1, -2)$也在图象上。
     - 它还具有轴对称性，对称轴是直线$y = x$和$y = -x$。例如，对于$y = \frac{k}{x}$，若点(a, b)在图象上，则点(b, a)（关于$y = x$对称）和点$(-b, -a)$（关于$y = -x$对称）也在图象上。

反比例函数图象与性质

函数	图象		所在象限
$y=\frac{k}{x}$ $(k\neq 0)$	$k>0$		第一、三象限（x,y 同号）
	$k<0$		第二、四象限（x,y 异号）

