1. **基本概念**
   - **排列**
     - **定义**：从n个不同元素中取出m（$m \leq n$）个元素，按照一定的顺序排成一列，叫做从n个不同元素中取出m个元素的一个排列。
     - 例如，从3个元素A、B、C中取出2个元素的排列有AB、AC、BA、BC、CA、CB，共6种。这里顺序不同视为不同的排列，如AB和BA是不同的排列。
   - **组合**
     - **定义**：从n个不同元素中取出m（$m \leq n$）个元素组成一组，叫做从n个不同元素中取出m个元素的一个组合。
     - 例如，从3个元素A、B、C中取出2个元素的组合有AB、AC、BC，共3种。这里AB和BA视为同一种组合，因为组合不考虑元素的顺序。
2. **排列数公式**
   - **公式**：$A_n^m = \frac{n!}{(n - m)!}$，其中$n!$（$n$的阶乘）$= n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \cdots \times 2 \times 1$。
   - **推导**：从n个元素中选m个元素进行排列。第一个位置有n种选法，第二个位置因为已经用掉了一个元素，所以有$n - 1$种选法，第三个位置有$n - 2$种选法，以此类推，第m个位置有$n - (m - 1) = n - m + 1$种选法。根据乘法原理，所有的选法总数为$n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \cdots \times (n - m + 1)$，将其化简得到$\frac{n!}{(n - m)!}$。
   - **示例**：计算A_5^3。
     - 根据公式$A_5^3 = \frac{5!}{(5 - 3)!} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1} = 5 \times 4 \times 3 = 60$。
3. **组合数公式**
   - **公式**：$C_n^m = \frac{n!}{m!(n - m)!}$。
   - **推导**：组合数与排列数的关系是，组合只关注取出元素的组合方式，而排列还关注元素的顺序。从n个元素中选m个元素的排列数为A_n^m，对于每一个组合，其内部m个元素的全排列数为$m!$，所以组合数$C_n^m = \frac{A_n^m}{m!} = \frac{n!}{m!(n - m)!}$。
   - **示例**：计算C_6^2。
     - 根据公式$C_6^2 = \frac{6!}{2!(6 - 2)!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{(2 \times 1) \times (4 \times 3 \times 2 \times 1)} = \frac{6 \times 5}{2 \times 1} = 15$。

4. **排列组合的性质**
   - **排列的性质**
     - $A_n^n = n!$，这表示从n个元素中取出n个元素进行排列，就是n个元素的全排列，其排列数为n的阶乘。
     - $A_n^m = n \times A_{n-1}^{m-1}$，这个性质可以通过排列的定义和计算方法推导出来，它在简化排列数计算等方面有应用。
   - **组合的性质**
     - $C_n^m = C_n^{n-m}$，例如$C_7^3 = C_7^4$。从组合的意义理解，从n个元素中选m个元素组成一组，和从n个元素中选$n - m$个元素剩下的一组是一一对应的关系。
     - $C_n^m + C_n^{m-1} = C_{n+1}^m$，这个性质在一些组合数的递推计算和组合问题的证明中经常用到。

5. **应用场景和解题技巧**
   - **应用场景**：排列组合在概率统计、密码学、资源分配、比赛场次安排等众多领域都有广泛应用。例如，计算彩票中奖的可能情况、安排比赛的赛程、计算密码的组合方式等。
   - **解题技巧**：
     - 对于排列问题，首先确定是全排列还是部分排列，然后明确元素的个数和选取的个数，直接代入排列数公式计算。如果遇到有特殊要求的排列，如元素有顺序限制、元素有相邻或不相邻要求等，可以采用捆绑法（将相邻元素看作一个整体）、插空法（先排其他元素，再将不相邻元素插入空位）等方法。
     - 对于组合问题，同样要确定元素个数和选取个数，使用组合数公式计算。当遇到分组问题，如平均分组、部分平均分组等，要注意分组的重复情况，需要除以重复的排列数来消除重复。例如，将6个人平均分成3组，其分组方法数为$\frac{C_6^2 \times C_4^2 \times C_2^2}{A_3^3}$，这里除以$A_3^3$是为了消除因为分组顺序产生的重复。

1. **排列数的定义和公式**
   - **定义**：从n个不同元素中取出m（$m \leq n$）个元素，按照一定的顺序排成一列，叫做从n个不同元素中取出m个元素的一个排列。排列数用符号A_n^m（也有教材用P_n^m表示）来表示。
   - **公式**：$A_n^m = \frac{n!}{(n - m)!}$，其中$n!$（$n$的阶乘）是指从$1$到$n$的所有正整数的乘积，即$n! = n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \cdots \times 2 \times 1$。例如，$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$。
2. **计算步骤**
   - **步骤一：确定n和m的值**
     - 例如，在一个问题中，要求从8个不同的物品中选取3个进行排列，这里$n = 8$，$m = 3$。
   - **步骤二：计算$n!$和$(n - m)!$**
     - 对于$n = 8$，$n! = 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 40320$。
     - 对于$m = 3$，$(n - m)! = (8 - 3)! = 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$。
   - **步骤三：代入公式计算排列数A_n^m**
     - 把$n!$和$(n - m)!$的值代入公式$A_n^m = \frac{n!}{(n - m)!}$，得到$A_8^3 = \frac{40320}{120} = 336$。
3. **特殊情况的排列数计算**
   - **全排列**
     - 当$m = n$时，排列数A_n^n表示n个元素的全排列。此时，根据公式$A_n^n = \frac{n!}{(n - n)!} = \frac{n!}{0!}$，规定$0! = 1$，所以$A_n^n = n!$。例如，$A_4^4 = 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$。
   - **有重复元素的排列数计算（特殊情况）**
     - 如果n个元素中有k种不同的元素，每种元素分别有$n_1, n_2, \cdots, n_k$个（$n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$），那么全排列数为$\frac{n!}{n_1! \times n_2! \times \cdots \times n_k!}$。例如，有$3$个$A$、$2$个$B$组成的$5$个元素的全排列数为$\frac{5!}{3! \times 2!} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{(3 \times 2 \times 1) \times (2 \times 1)} = 10$。这种情况的原理是先把所有元素看作不同元素进行全排列（有$n!$种情况），然后由于相同元素之间的交换不产生新的排列，所以要除以相同元素各自的全排列数（$n_1! \times n_2! \times \cdots \times n_k!$）来消除重复的情况。

1. **组合数的定义和公式**
   - **定义**：从n个不同元素中取出m（$m \leq n$）个元素组成一组，叫做从n个不同元素中取出m个元素的一个组合。组合数用符号C_n^m（在一些计算器或软件中也可能表示为$\binom{n}{m}$）来表示。
   - **公式**：$C_n^m = \frac{n!}{m!(n - m)!}$，其中$n!$是$n$的阶乘，即$n! = n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \cdots \times 2 \times 1$，$m!$和$(n - m)!$同理。
2. **计算步骤**
   - **步骤一：确定n和m的值**
     - 例如，在一个抽奖活动中，从10个号码球中抽取4个号码，这里$n = 10$，$m = 4$。
   - **步骤二：计算$n!$、$m!$和$(n - m)!$**
     - 对于$n = 10$，$n! = 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 3628800$。
     - 对于$m = 4$，$m! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$。
     - 对于$(n - m) = (10 - 4) = 6$，$(n - m)! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$。
   - **步骤三：代入公式计算组合数C_n^m**
     - 把$n!$、$m!$和$(n - m)!$的值代入公式$C_n^m = \frac{n!}{m!(n - m)!}$，得到

       $C_{10}^4 = \frac{3628800}{24 \times 720} = \frac{3628800}{17280} = 210$。
3. **组合数的性质及利用性质计算**
   - **性质一：$C_n^m = C_n^{n - m}$**
     - 例如，计算C_7^3，根据此性质也可以计算$C_7^{7 - 3} = C_7^4$。
     - 计算$C_7^3 = \frac{7!}{3!(7 - 3)!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{(3 \times 2 \times 1) \times (4 \times 3 \times 2 \times 1)} = \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1} = 35$。
     - 计算$C_7^4 = \frac{7!}{4!(7 - 4)!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{(4 \times 3 \times 2 \times 1) \times (3 \times 2 \times 1)} = \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1} = 35$，验证了该性质。

- **性质二：** $C_n^m + C_n^{m-1} = C_{n+1}^m$
  - 例如，已知C_5^2和C_5^3，计算C_6^3。
  - 先计算$C_5^2 = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{(2 \times 1) \times (3 \times 2 \times 1)} = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 10$。
  - 再计算$C_5^3 = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5 \times 6 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{(3 \times 2 \times 1) \times (2 \times 1)} = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 10$。
  - 根据性质$C_6^3 = C_5^2 + C_5^{3-1} = C_5^2 + C_5^2 = 10 + 10 = 20$。

4. **利用杨辉三角计算组合数（对于较小的n和m）**
   - 杨辉三角的特点是每行数字左右对称，由 1 开始逐渐变大，然后再变小到 1。第n行的数字个数为n个，且第n行第m个数（m从 0 开始计数）就是C_n^m。
   - 例如，杨辉三角的第 5 行是1、4、6、4、1，这里$C_5^0 = 1$，$C_5^1 = 4$，$C_5^2 = 6$，$C_5^3 = 4$，$C_5^4 = 1$。可以通过观察杨辉三角的规律来快速得到较小的组合数。

1. **区别**
   - **定义角度**
     - **排列**：从n个不同元素中取出m（$m \leq n$）个元素，按照一定的顺序排成一列，叫做从n个不同元素中取出m个元素的一个排列。例如，从A、B、C三个元素中选两个进行排列，有AB、BA、AC、CA、BC、CB这六种情况。排列强调元素的顺序，不同的顺序被视为不同的排列。
     - **组合**：从n个不同元素中取出m（$m \leq n$）个元素组成一组，叫做从n个不同元素中取出m个元素的一个组合。同样从A、B、C三个元素中选两个进行组合，只有AB、AC、BC这三种情况。组合不考虑元素的顺序，只要元素组合相同，就视为同一种组合。
   - **计算方式**
     - **排列数公式**：$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$，例如计算从5个元素中选3个元素的排列数，$A_5^3 = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1} = 60$。
     - **组合数公式**：$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$，计算从5个元素中选3个元素的组合数，$C_5^3 = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{(3 \times 2 \times 1) \times (2 \times 1)} = 10$。可以看出，对于相同的$n$和$m$，排列数通常大于组合数，因为排列考虑了元素的顺序，情况更多。

- **实际应用场景**
  - **排列应用场景**：当问题涉及到元素的顺序、位置等因素时，通常使用排列。例如，安排座位的不同坐法、比赛的名次排列、电话号码的数字排列等。比如，要安排5个人坐在一排5个座位上，不同的坐法有$A_5^5 = 5! = 120$种，因为这里不同的人坐在不同的位置是不同的情况，顺序很重要。
  - **组合应用场景**：当问题只关注元素的选取，而不关心选取元素的顺序时，使用组合。例如，从一群人中选几个人组成小组、从一堆物品中选几个物品等。比如，从10个不同的水果中选3个水果组成一组，有$C_{10}^3 = \frac{10!}{3!(10 - 3)!} = 120$种选法，这里只关注选了哪3个水果，而不关心选取的顺序。

2. **联系**
   - **计算联系**：组合数和排列数的计算有密切关系。排列数A_n^m和组合数C_n^m之间存在公式$A_n^m = C_n^m \times m!$。这是因为从n个元素中选m个元素的排列可以看作先从n个元素中选m个元素（这是组合的过程，有C_n^m种情况），然后对选出来的m个元素进行全排列（有$m!$种情况）。例如，从4个元素中选3个元素进行排列，先计算组合数$C_4^3 = \frac{4!}{3!(4 - 3)!} = 4$，然后对选出来的3个元素进行全排列$A_3^3 = 3! = 6$，所以排列数$A_4^3 = C_4^3 \times A_3^3 = 4 \times 6 = 24$。

- **概念联系**：排列和组合都是从给定的n个元素中选取m个元素的操作方式，它们都是组合数学中的基本概念，在解决很多计数问题时常常需要根据问题的特点综合运用排列和组合的知识。例如，在一个抽奖活动中，先从众多号码中用组合的方式选出中奖号码组合，然后如果考虑中奖号码的公布顺序（如一等奖号码先公布，二等奖号码后公布等），就涉及到排列的问题。

1. **排列题型及技巧**
   - **全排列题型**
     - **题型特点**：将n个不同元素全部进行排列。例如，将A、B、C、D这4个字母全排列，求排列的方式有多少种。
     - **解题技巧**：直接使用全排列公式$A_n^n = n!$。对于上述例子，$n = 4$，所以全排列的方式有$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$种。
   - **选排列题型（元素不重复）**
     - **题型特点**：从n个不同元素中选取m（$m < n$）个元素进行排列。比如，从6个不同的数字中选3个数字组成一个三位数（数字不重复），有多少种组合方式。
     - **解题技巧**：运用排列数公式$A_n^m = \frac{n!}{(n - m)!}$。在这个例子中，$n = 6$，$m = 3$，则排列数$A_6^3 = \frac{6!}{(6 - 3)!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{3 \times 2 \times 1} = 120$种。

- **元素有特殊要求的排列题型**
  - **相邻问题**
    - **题型特点**：某些元素必须相邻。例如，A、B、C、D、E这5个元素排队，其中A和B必须相邻，求排列方式。
    - **解题技巧**：使用捆绑法。将A和B看作一个整体（内部有$A_2^2 = 2$种排列方式，即AB或BA），然后与C、D、E一起进行全排列，此时相当于对4个元素进行全排列，有$A_4^4 = 24$种方式。所以总的排列方式有$2 \times 24 = 48$种。
  - **不相邻问题**
    - **题型特点**：某些元素不能相邻。例如，A、B、C、D、E这5个元素排队，其中A和B不能相邻，求排列方式。
    - **解题技巧**：采用插空法。先排C、D、E，有$A_3^3 = 6$种排列方式，形成4个空位（包括两端），然后将A和B插入这4个空位中，有$A_4^2 = 12$种方式。所以总的排列方式有$6 \times 12 = 72$种。

2. **组合题型及技巧**
   - **普通组合题型**
     - **题型特点**：从n个不同元素中取出m（$m \leq n$）个元素组成一组，不考虑元素的顺序。例如，从8个不同的球中选3个球，有多少种选法。
     - **解题技巧**：使用组合数公式$C_n^m = \frac{n!}{m!(n - m)!}$。在这个例子中，$n = 8$，$m = 3$，则组合数$C_8^3 = \frac{8!}{3!(8 - 3)!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{(3 \times 2 \times 1) \times (5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1)} = 56$种。

- **分组问题（无顺序之分）**
  - **平均分组题型**
    - **题型特点**：将n个元素平均分成m组，每组元素个数相同。例如，将6个人平均分成3组，每组2人。
    - **解题技巧**：先按照组合数计算分组的方法数，即$\frac{C_n^k \times C_{n - k}^k \times \cdots \times C_k^k}{A_m^m}$，其中$n = mk$。对于上述例子，先从6人中选2人一组，有$C_6^2$种选法；再从剩下4人中选2人一组，有$C_4^2$种选法；最后剩下2人一组，有$C_2^2$种选法。但这样分组会有重复，因为这3组的顺序是无意义的，所以要除以A_3^3。计算可得$\frac{C_6^2 \times C_4^2 \times C_2^2}{A_3^3} = \frac{\frac{6!}{2!(6 - 2)!} \times \frac{4!}{2!(4 - 2)!} \times \frac{2!}{2!(2 - 2)!}}{3!} = \frac{15 \times 6 \times 1}{6} = 15$种分组方法。

- **部分平均分组题型**
  - **题型特点**：将n个元素分成m组，其中有几组元素个数相同。例如，将7个人分成3组，一组3人，两组2人。
  - **解题技巧**：同样先按组合数计算分组的方法数，再除以相同人数组的全排列数。先从7人中选3人一组，有C_7^3种选法；再从剩下4人中选2人一组，有C_4^2种选法；剩下2人自动为一组，有C_2^2种选法。但两组2人是无顺序之分的，所以要除以A_2^2。计算可得

$$\frac{C_7^3\times C_4^2\times C_2^2}{A_2^2}=\frac{\frac{7!}{3!(7-3)!}\times\frac{4!}{2!(4-2)!}\times\frac{2!}{2!(2-2)!}}{2!}=\frac{35\times6\times1}{2}=105$$种分组方法。

- **分配问题（有顺序之分）**
  - **题型特点**：将n个不同元素分配到m个不同的对象或位置。例如，将5本不同的书分给3个不同的学生，每个学生至少一本。
  - **解题技巧**：可以先分组再分配。先将5本书分成3组（可以是1、1、3或者2、2、1两种分组方式），计算分组方法数（对于1、1、3的分组方式有$\frac{C_5^3\times C_2^1\times C_1^1}{A_2^2}$种，对于2、2、1的分组方式有$\frac{C_5^2\times C_3^2\times C_1^1}{A_2^2}$种），然后将分好的组全排列分配给3个学生，即乘以$A_3^3$。将两种分组方式对应的分配方法数相加，得到总的分配方式。